Int. J. Solids Structures, 1968, Vol. 4, pp. 1025 to 1030. Pergamon Press. Printed in Great Britain

TRANSFORMATION DES DONNEES AUX LIMITES RELATIVES AU DEMI-PLAN ELASTIQUE HOMOGENE ET ISOTROPE

H. D. Bui

Laboratoire de Mécanique des Solides, Ecole Polytechnique, Paris, 5ème, et Centre des Renardières, Moret/Loing, Electricité de France

Résumé—On étudie suivant la méthode de Bashelishvili le champ du déplacement du demi-plan élastique homogène isotrope. On établit la correspondance entre les données aux limites, ce qui permet d'étudier les problèmes mixtes d'une manière simple.

1. INTRODUCTION

On connaît les solutions fondamentales des deux problèmes aux limites relatifs au semi-espace élastique homogène et isotrope: la solution de Boussinesq pour les données en contraintes [1] et celle de Bashelishvili pour les données en déplacements [2]. Les solutions correspondantes pour le demi-plan élastique s'obtiennent facilement en considérant la déformation plane du semi-espace. Nous étudions dans cette note les problèmes relatifs au demi-plan et montrons que des données mixtes peuvent être ramenées soit à des données en contraintes, soit à des données en déplacements.

Au paragraphe 2, nous rappelons la solution de Bashelishvili relative au semi-espace, d'où il est facile d'établir la correspondance entre déplacements et contraintes à la surface limite. La correspondance inverse, expression du déplacement aux limites à partir des données de la contrainte, est bien connue.

Au paragraphe 3, sont données les formules de transformation relatives au demi-plan. Elles font apparaître certains relations de réciprocité qui sont utilisées pour la transformation des données aux limites.

Au paragraphe 4, nous donnons l'application de la méthode au cas d'une fissure plane dans un milieu indéfini, lorsque sur les deux lèvres de la fissure on impose soit des déplacements, soit des contraintes, soit des données mixtes. Nous étudions également le poinçon lisse. Les calculs sont nettement plus simples que les calculs fondés sur la méthode de Muskhelishvili et ils permettent une intégration numérique.

2. MATRICE DE BASHELISHVILI

L'espace étant rapporté à trois axes rectangulaires $0x_1x_2x_3$, soit le semi-espace élastique homogène isotrope de constantes de Lamé λ, μ, désigné par $V(x_3 < 0)$, limité par le plan $P(x_3 = 0)$. On désigne par $\tilde{q}$ la restriction de $q(x)$ au plan P. Soit la matrice:

$$K_{ij}(x, t) = \frac{\mu}{\pi(\lambda+3\mu)}\left[\delta_{ij}+\frac{3}{2}\frac{(\lambda+\mu)}{\mu}\frac{\partial\rho}{\partial t_i}\frac{\partial\rho}{\partial t_j}\right]\frac{x_3}{\rho^3} \tag{1}$$

$$f(x, t) = \text{distance } x, t \qquad x = (x_1, x_2, x_3).$$

Elle fait connaître par :

$$u_i(x) = -\int_P K_{ij}(x, t)\tilde{u}_j(t)\,\mathrm{d}S_t \tag{2}$$

les composantes du déplacement de tout point x de V, lorsqu'on impose le déplacement continu $\tilde{u}(t)$ au point t de P. En effet, (2) est solution du système homogène de l'élastostatique. D'après un théorème de Kupradze [2], elle vérifie les conditions à la limite

$$\lim_{\substack{x \in V \\ x \to y \in P}} -\int_P K_{ij}(x, t)\tilde{u}_j(t)\,\mathrm{d}S_t = \tilde{u}(y).$$

Enfin si les données $\tilde{u}_i$ sont bornées à l'infini, la solution (2) est bornée à l'infini. Cette restriction est suffisante pour l'uncité de la solution (Turteltaub et Sternberg [3]).

Les contraintes en un point x de V s'obtiennent par dérivations partielles de (2) sous le signe somme. Il est intéressant de connaître les contraintes quand on s'approche du plan limite par les valeurs de x_3 négatives. Soit y un point du plan, $y = (y_1 y_2 0)$. Cherchons par exemple la dérivée partielle :

$$\tilde{u}_{3,3}(y) = \lim_{\substack{x_3 < 0 \\ x_3 \to 0}} \frac{u_3(x) - \tilde{u}_3(y)}{x_3}, \qquad x = (y_1 y_2 x_3).$$

L'intégrale (2) sur le plan P est décomposée en deux parties, l'une correspondant à $P-C$ et l'autre à C, où $C \equiv C(\varepsilon, y)$ est un cercle du plan de centre y et de rayon $\varepsilon > 0$, arbitrairement petit.

$$\begin{aligned}\frac{u_3(x)-\tilde{u}_3(y)}{x_3} = {} & \frac{-\mu}{\pi(\lambda+3\mu)}\int_{P-C}\frac{\tilde{u}_3(t)-\tilde{u}_3(y)}{\rho^3(t,x)}\,\mathrm{d}S_t \frac{-\mu}{\pi(\lambda+3\mu)}\int_C \frac{\tilde{u}_3(t)-\tilde{u}_3(y)}{\rho^3(t,x)}\,\mathrm{d}S_t \\ & -\frac{3(\lambda+\mu)}{2\pi(\lambda+3\mu)}x_3^2\int_{P-C}\frac{\tilde{u}_3(t)}{\rho^5(t,x)}\,\mathrm{d}S_t - \frac{3(\lambda+\mu)}{2\pi(\lambda+3\mu)}x_3^2\int_C \frac{\tilde{u}_3(t)-\tilde{u}_3(y)}{\rho^5(t,x)}\,\mathrm{d}S_t \\ & -\frac{\mu}{\pi(\lambda+3\mu)}\tilde{u}_3(y)\int_P \frac{\mathrm{d}S_t}{\rho^3(t,x)} - \frac{3(\lambda+\mu)}{2\pi(\lambda+3\mu)}\tilde{u}_3(y)x_3^2\int_C \frac{\mathrm{d}S_t}{\rho^5(t,x)} - \frac{\tilde{u}_3(y)}{x_3}.\end{aligned}$$

La somme des trois derniers terms est identiquement nulle :

$$\frac{\tilde{u}_3(y)}{x_3}\left[-\frac{\mu}{\pi(\lambda+3\mu)}(-2\pi) - \frac{3(\lambda+\mu)}{2\pi(\lambda+3\mu)}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - 1\right] \equiv 0 \qquad (x_3 < 0).$$

La troisième intégrale sur $P-C$ est finie et proportionnelle à x_3^2, sa limite quand $x_3 \to 0$ est donc nulle. Quand à la deuxième et la quatrième intégrale sur C, elles ont respectivement comme limites quand $x_3 \to 0$ les valeurs $O(\varepsilon)$ et zéro, ce qu'on vérifie facilement, pourvu que $\tilde{u}(t)$ soit deux fois dérivable au voisinage y, les dérivées premières continues, les dérivées secondes continues par morceaux. Il vient finalement :

$$\tilde{u}_{3,3}(y) = \frac{-\mu}{\pi(\lambda+3\mu)}\int_{P-C(\varepsilon,y)}\frac{\tilde{u}_3(t)-\tilde{u}_3(y)}{\rho^3(t,y)}\,\mathrm{d}S_t + O(\varepsilon) \tag{3}$$

pour ε arbitrairement petit. On voit que le calcul des contraintes à la limite introduit les intégrales singulières au sens des valeurs principales. Nous les notons par des intégrales ordinaires en sous entendant toujours les valeurs principales.

Les autres dérivées partielles s'obtiennent facilement. Voici les composantes des contraintes normales et tangentielles en tout point y où $\tilde{u}_i(y)$ est régulier:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{33}(y) &= -\frac{2\mu^2}{(\lambda+3\mu)}[\tilde{u}_{1,1}(y)+\tilde{u}_{2,2}(y)]-\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{\pi(\lambda+3\mu)}\int_P \frac{\tilde{u}_3(t)-\tilde{u}_3(y)}{\rho^3(t,y)}\,\mathrm{d}S_t \\
\tilde{\sigma}_{13}(y) &= -\frac{\mu^2}{\pi(\lambda+3\mu)}\int_P \frac{\tilde{u}_1(t)-\tilde{u}_1(y)}{\rho^3(t,y)}\,\mathrm{d}S_t-\frac{3\mu(\lambda+\mu)}{2\pi(\lambda+3\mu)}\int_P \frac{(t_1-y_1)^2[\tilde{u}_1(t)-\tilde{u}_1(y)]}{\rho^5(t,y)}\,\mathrm{d}S_t \\
&\quad +\frac{2\mu^2}{(\lambda+3\mu)}\tilde{u}_{3,1}(y)-\frac{3\mu(\lambda+\mu)}{2\pi(\lambda+3\mu)}\int_P \frac{(t_1-y_1)(t_2-y_2)[\tilde{u}_2(t)-\tilde{u}_2(y)]}{\rho^5(t,y)}\,\mathrm{d}S_t \\
\tilde{\sigma}_{23}(y) &= -\frac{\mu^2}{\pi(\lambda+3\mu)}\int_P \frac{\tilde{u}_2(t)-\tilde{u}_2(y)}{\rho^3(t,y)}\,\mathrm{d}S_t-\frac{3\mu(\lambda+\mu)}{2\pi(\lambda+3\mu)}\int_P \frac{(t_2-y_2)^2[\tilde{u}_2(t)-\tilde{u}_2(y)]}{\rho^5(t,y)}\,\mathrm{d}S_t \\
&\quad +\frac{2\mu^2}{(\lambda+3\mu)}\tilde{u}_{3,2}(y)-\frac{3\mu(\lambda+\mu)}{2\pi(\lambda+3\mu)}\int_P \frac{(t_1-y_1)(t_2-y_2)[\tilde{u}_1(t)-\tilde{u}_1(y)]}{\rho^5(t,y)}\,\mathrm{d}S_t.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

3. LE DEMI-PLAN ELASTIQUE

Nous étudions le demi-plan $(x_1, x_3 < 0)$ par la déformation plane du semi-espace. Le champ des déplacements est parallèle au plan $x_2 = 0$ et ne dépend pas de x_2. Après intégration par rapport à t_2 les formules (2) donnent:

$$
\begin{aligned}
u_1(x) &= \frac{2(\lambda+\mu)}{\pi(\lambda+3\mu)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(t_1-x_1)x_3^2\tilde{u}_3(t_1)}{\rho^4(t,x)}\,\mathrm{d}t_1 \\
&\quad -\frac{2\mu}{\pi(\lambda+3\mu)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[1+\frac{(\lambda+\mu)}{\mu}\frac{(t_1-x_1)^2}{\rho^2(t,x)}\right]\frac{x_3\tilde{u}_1(t_1)}{\rho^2(t,x)}\,\mathrm{d}t_1 \\
u_3(x) &= -\frac{2\mu}{\pi(\lambda+3\mu)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[1+\frac{(\lambda+\mu)}{\mu}\frac{(t_1-x_1)^2}{\rho^2(t,x)}\right]\frac{x_3\tilde{u}_3(t_1)}{\rho^2(t,x)}\,\mathrm{d}t_1 \\
&\quad +\frac{2(\lambda+\mu)}{\pi(\lambda+3\mu)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(t_1-x_1)x_3^2\tilde{u}_1(t_1)}{\rho^4(t,x)}\,\mathrm{d}t_1
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Soit U l'espace des fonctions $f(x_1)$ continues, deux fois continument dérivables par morceaux (discontinuité de $f' \equiv f_{,1}$ aux points $\omega_n \ldots$) et se comportant à l'infini comme $o(|x_1|)$. Les intégrales de (4) sont effectuées par rapport à t_2. Puis en intégrant le résultat obtenu par parties, il vient après simplification ($\tilde{u}_i \in U$).

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{33}(x_1) &= -\frac{2\mu^2}{\lambda+3\mu}\tilde{u}_1'(x_1)-\frac{2\mu(\lambda+2\mu)}{\pi(\lambda+3\mu)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{u}_3'(t)}{t-x_1}\,\mathrm{d}t \\
\tilde{\sigma}_{13}(x_1) &= -\frac{2\mu(\lambda+2\mu)}{\pi(\lambda+3\mu)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{u}_1'(t)}{t-x_1}\,\mathrm{d}t+\frac{2\mu^2}{(\lambda+3\mu)}\tilde{u}_3'(x_1).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

On reconnaît dans (6) les intégrales de Cauchy classiques (méthode de Muskhelishvili). Ces formules nous donnent les contraintes aux limites à partir des données en déplacements. Réciproquement les déplacements aux limites peuvent être obtenus à partir des données en contraintes par la résolution dans U des équations duales (6). Si l'une des composantes du déplacement est connue, une seule équation intégrale est nécessaire pour déterminer l'autre composante. Examinons ce type de problème. Soient les données mixtes suivantes $\tilde{u}_3 \neq 0$ et $\tilde{\sigma}_{13} = 0$. La seconde équation (6) fournit l'équation intégrale singulière pour l'inconnue $\tilde{u}'_1$:

$$\tilde{u}'_3(x_1) = \frac{(\lambda+2\mu)}{\mu}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{u}'_1(t)}{t-x_1}\,dt \qquad (x_1 \neq \omega_n) \tag{7}$$

dont la solution sous certaines conditions est bien connue. Elle est donnée par la formule de réciprocité (Problème de Hilbert à arcs infinis):

$$\tilde{u}'_1(x_1) = -\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{u}'_3(t)}{t-x_1}\,dt \qquad (x_1 \neq \omega_n). \tag{8}$$

Les conditions d'existence des relations de réciprocité (7) et (8) sont en fait assez larges. Pour le problème qui nous concerne, $\tilde{u}_3$ étant dans U, on peut montrer qu'il est suffisant d'avoir $\tilde{u}'_3$ décroissant monotonement à l'infini comme $O(|x_1|^{-\alpha})$ et $\tilde{u}''_3$ comme $O(|x_1|^{-\alpha-1})$, $\alpha > 0$ pour que (7) entraine bien (8) et réciproquement.

On note que d'après la première équation (6) et (8) la contrainte normale est proportionnelle à $\tilde{u}'_1$. Pour satisfaire aux exigences mécaniques, la résultante des forces appliquées au demi-plan devant être finie, il est donc nécessaire que $\tilde{u}'_1(x_1)$ soit sommable.

Les formules de réciprocité de Hilbert permettent la résolution très simple des équations intégrales duales (6) quand les données sont maintenant $\tilde{\sigma}_{33}$ et $\tilde{\sigma}_{13}$. En effet la première équation (6) sous certaines conditions donne par réciprocité:

$$\tilde{u}'_3(x_1) = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{u}'_1(t)+a\sigma_{33}(t)}{t-x_1}\,dt \qquad a = \frac{\lambda+3\mu}{2\mu^2}$$

Portant ceci dans la deuxième équation, on obtient l'équation intégrale de Cauchy pour $\tilde{u}'_1$, dont la solution sous certaines conditions est donnée par la formule de réciprocité:

$$\tilde{u}'_1(x_1) = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{t-x_1}\,dt, \qquad f(x) = \tilde{\sigma}_{13}(x) - \frac{\mu}{(\lambda+2\mu)\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{\sigma}_{33}(t)}{t-x}\,dt$$

Les conditions portant sur $f(t)$ et sur $\tilde{u}'_1(t)+a\sigma_{33}(t)$ sont analogues à celles imposées à $\tilde{u}'_3$ dans l'étude du premier problème.

Nous allons donner l'application de cette méthode de transformation des données à plusieurs problèmes simples.

4. EXEMPLES D'APPLICATION

(a) *Fissure dans un milieu indéfini* (données du déplacement normal)

La fissure est une coupure dans le plan (x_1, x_3) suivant le segment de droite $|x_1| \leq a$, $x_3 = 0$. Elle est initialement fermée. On écarte symétriquement ses deux lèvres. Par suite on se ramène à l'étude du demi-plan dont voici les données:

$$\tilde{\sigma}_{13}(x_1) = 0, \qquad \tilde{u}_3(x_1) = 0 \qquad \mathrm{Si}\,|x_1| \geq a, \qquad \tilde{u}_3(x_1) = \frac{C}{a^2}(x_1^2 - a^2) \qquad \mathrm{Si}\,|x_1| \leq a$$

où C est une constante positive.

Le déplacement tangentiel est donné par la primitive continue et impaire de (8)

$$\tilde{u}_1(x_1) = -\frac{\mu C}{\pi(\lambda+2\mu)a^2}\left[2ax_1 + (x_1^2 - a^2)\log\left|\frac{a-x_1}{a+x_1}\right|\right].$$

La contrainte normale est donnée par la première relation (6) et par (8):

$$\tilde{\sigma}_{33}(x_1) = -\frac{2\mu(\lambda+\mu)C}{\pi(\lambda+2\mu)a^2}\left[4a + 2x_1\log\left|\frac{a-x_1}{a+x_1}\right|\right].$$

Nous retrouvons la solution classique bien connue (Green et Zerna [5]).

(b) *Fissure dans un milieu indéfini* (donnée de la contrainte normale)

Les données sur la même fissure sont:

$$\tilde{u}_3(x_1) = 0, \qquad |x_1| \geq a, \qquad \tilde{\sigma}_{33}(x_1) \neq 0 \qquad |x_1| < a, \qquad \tilde{\sigma}_{13}(x_1) = 0.$$

Cherchons le déplacement normal $\tilde{u}_3(x_1)$ pour $|x_1| \leq a$. La condition $\tilde{\sigma}_{13} = 0$ permet d'utiliser (7) et (8). En tenant compte de (8) la première relation (6) s'écrit:

$$\tilde{\sigma}_{33}(x_1) = -\frac{2\mu(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{\tilde{u}_3'(t)}{(t-x_1)}\,\mathrm{d}t \qquad |x_1| < a.$$

C'est l'équation intégrale singulière pour $\tilde{u}_3'$ (Problème de Hilbert à arc fini) dont la solution est connue [6]: $|x_1| < a$

$$\tilde{u}_3'(x_1) = \frac{\lambda+2\mu}{2\pi\mu(\lambda+\mu)}\left|\frac{a+x_1}{a-x_1}\right|^{\frac{1}{2}}\int_{-a}^{+a}\left|\frac{a-t}{a+t}\right|^{\frac{1}{2}}\frac{\tilde{\sigma}_{33}(t)}{t-x_1}\,\mathrm{d}t + \frac{C}{|a^2-x_1^2|^{\frac{1}{2}}}.$$

Le déplacement $\tilde{u}_3(x_1)$ dépend de deux constantes, déterminées par $\tilde{u}_3(-a) = \tilde{u}_3(a) = 0$. Le déplacement tangentiel est obtenu ensuite par (8).

(c) *Poinçons lisses*

Le déplacement normal $\tilde{u}_3(x_1)$ est donné sur les intervalles $a_K \leq x_1 \leq b_K$ ($K = 1 \ldots n$). La contrainte normale $\tilde{\sigma}_{33}$ est nulle en dehors de ces intervalles. La cission $\tilde{\sigma}_{13}$ est nulle en tout point. Cette dernière condition permet d'utiliser (7) et (8). En tenant compte de (8) et de la première relation (6), la relation (7) s'écrit:

$$\tilde{u}_3'(x_1) = \frac{\lambda+2\mu}{2\pi\mu(\lambda+\mu)}\int_L \frac{\tilde{\sigma}_{33}(t)}{t-x_1}\,\mathrm{d}t \qquad x_1 \neq a_K, b_K$$

L désigne la réunion des intervalles $[a_K b_K]$. C'est l'équation intégrale singulière pour $\tilde{\sigma}_{33}(x_1)$ dont la solution est connue [6]. Si $\tilde{u}_3'$ est continue dans $[a_K b_K]$, la contrainte dans $a_K < x_1 < b_K$ est donnée par:

$$\tilde{\sigma}_{33}(x_1) = -\frac{2\mu(\lambda+\mu)}{\pi(\lambda+2\mu)}\left|\frac{R_a(x_1)}{R_b(x_1)}\right|^{\frac{1}{2}}\int_L\left|\frac{R_b(t)}{R_a(t)}\right|^{\frac{1}{2}}\frac{\tilde{u}_3'(t)}{t-x_1}\,\mathrm{d}t + \frac{P_{n-1}(x_1)}{|R_a(x_1)R_b(x_1)|^{\frac{1}{2}}}$$

avec

$$R_a(t) = \prod_{K=1}^{n} (t-a_K), \qquad R_b(t) = \prod_{K=1}^{n} (t-b_K)$$

$P_{n-1}(x_1)$ est un polynome de degré $n-1$ dont les constantes sont déterminées par les résultantes des forces appliquées sur chaque poinçon.

Par exemple pour le poinçon plat unique $\tilde{u}'_3 = 0$ dans $-a \leq x_1 \leq a$, la contrainte normale sous le poinçon est

$$\tilde{\sigma}_{33}(x_1) = F\Pi^{-1}(a^2-x_1^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad F: \text{(Résultante des forces).}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Boussinesq, *Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*. Gauthier-Villars (1885).
[2] V. D. Kupradze, *Progress in Solids Mechanics*, Vol. 3, edited by I. N. Sneddon. North-Holland (1963).
[3] M. J. Turteltaub et E. Sternberg, Elastostatic uniqueness in the half-space. *Archs ration. Mech. Analysis* **24**, 233 (1967).
[4] N. I. Muskhelishvili, *Some Fundamental Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Nordhoff (1963).
[5] A. E. Green et W. Zerna, *Theoretical Elasticity*. Oxford University Press (1960).
[6] N. I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*. Nordhoff (1953).

(*Reçu le* 3 *Janvier* 1968)

Abstract—The displacement field of an elastic, homogeneous, isotropic half-plane is studied by the method of Bashelishvili. The correspondence between the prescribed boundary values is established, which permits the study of mixed problems in a simple manner.

Абстракт—Рассматривается поле перемешений для упругой,однородной, изотропной полуплоскости методом Ъашелишвили. Установливается зависимость между заданными граничными условиями, которые позволяют определить смешаные задачи простым способом.